

## **ESTUDIO ANALÍTICO DE CUENCAS DINÁMICAS DE HOPF EN FLUJOS BIFÁSICOS EN CANALES**

*Darío F. Delmastro y Luis E. Juanicó*

Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro.

### **Resumen**

Se presenta un modelo algebraico bidimensional en demoras de la dinámica de canales de dos fases en ebullición tanto horizontales como verticales. Su simplicidad permite un tratamiento completamente analítico del problema, tanto lineal como no lineal, preservando una descripción realista de los principales mecanismos involucrados. Utilizando métodos perturbativos se identificaron cuencas de estabilidad asociadas a bifurcaciones de Hopf de ambos tipos, subcríticas y supercríticas, estableciéndose un criterio analítico para la transcripción de uno a otro tipo. El análisis lineal permitió observar un efecto inestabilizante del término gravitatorio sobre las oscilaciones de ondas de densidad. Además, incrementando la preponderancia del término gravitatorio, se extiende el carácter subcrítico de esta bifurcación hacia subenfriamientos más altos. En suma, la gravedad tiene un efecto inestabilizante sobre la dinámica de canales en ebullición frente al fenómeno de ondas de densidad. Se reducen los márgenes de estabilidad lineal y además se acentúa el carácter no conservativo del análisis lineal de estabilidad.

Palabras clave: Dinámica no lineal, flujo de dos fases, bifurcación de Hopf.

### **Abstract**

A bidimensional algebraic delay model is presented in order to study the two-phase boiling channels dynamic, either horizontal or vertical ones. Its simplicity allows a fully analytical treatment of the system dynamic, both linear and nonlinear, while preserving a realistic description of the main mechanisms involved. Both kinds of Hopf bifurcation's, subcritical and supercritical were identified and treated using perturbation methods. A fully analytical criterion for Hopf bifurcation transcription was determined. The linear stability boundaries were analytically obtained. An unstabilizing effect of the gravity term over density-wave oscillations was found. It was found that increasing the gravity term, the subcritical character of the bifurcation is extended towards higher subcoolings. So, gravity produces an unstabilizing effect over the boiling channel dynamic, considering the density-wave phenomenon. It reduces the lineal stability margin and the linear analysis approach becomes less conservative.

Key words: Nonlinear dynamic, two phase flow, Hopf's bifurcation.

*Trabajo presentado con motivo de la entrega del premio "Ernesto E. Galloni", -instituido por la familia Galloni- en Ingeniería Nuclear, al Dr. Darío F. Delmastro, el 12 de noviembre de 1999.*

## Introducción

El fenómeno de inestabilidades dinámicas en canales en ebullición, conocidas como ondas de densidad, ha sido extensamente estudiado durante los últimos 30 años (Lahey and Drew, 1980; Rizwan Uddin, 1994). Éstas pueden presentarse bajo ciertas condiciones de operación en los sistemas en ebullición, para las cuales éstos se vuelven inestables debido a retardos producidos sobre los mecanismos de realimentación en las caídas de presión. Perturbaciones iniciadas en la entrada del canal viajan con el fluido, causando demoras en el transporte de los cambios en las variables de estado locales. Bajo ciertas condiciones de operación dadas, estas demoras pueden originar realimentaciones autosostenidas (Lahey and Moody, 1977).

El fenómeno de inestabilidad de ondas de densidad en sistemas bifásicos en ebullición, además de ser interesante desde el punto de vista científico, tiene serias implicaciones prácticas para muchas industrias. Intercambiadores de calor con cambio de fase, varios equipos de procesos químicos, reactores nucleares de agua en ebullición (BWRs), y generadores de vapor, en forma abreviada, son candidatos potenciales a experimentar este tipo de inestabilidad. Sin embargo, ha sido relativamente escaso el trabajo de investigación enfocado sobre la influencia de la gravedad en la estabilidad de flujos bifásicos en ebullición. No obstante, éste podría ser de interés para los nuevos diseños de reactores bajo circulación natural (Durnan, 1988; Kataoka et al., 1988).

Los métodos utilizados para predecir las inestabilidades pueden clasificarse en dos categorías: lineales y no lineales. La herramienta clásica utilizada ha sido el análisis lineal en el dominio frecuencial, orientada a la determinación de los límites de estabilidad para perturbaciones infinitesimales. Esta herramienta no permite en cambio predecir la respuesta del sistema ni las características de los comportamientos oscilatorios.

Para estudiar el comportamiento del sistema ante perturbaciones finitas es ne-

cesario considerar efectos esencialmente no lineales relacionados con las realimentaciones en las caídas de presión en el sistema. En un entorno del umbral de estabilidad lineal, la dinámica del sistema puede caracterizarse por una bifurcación normal de Hopf (Achard et al., 1985). Se han utilizado técnicas especiales de bifurcaciones de Hopf para estudiar analítica y numéricamente su amplitud, frecuencia y carácter (subcrítico o supercrítico) en canales horizontales (Clausse et al., 1996; Delmastro et al., 1998a) o sólo numéricamente en canales verticales (Delmastro y Juanicó, 1998b).

El estudio de los flujos en ebullición nos presentan ejemplos muy interesantes de fenómenos inherentemente no lineales. Consideremos por ejemplo los puntos de equilibrio (puntos fijos) de un canal en ebullición uniformemente calefaccionado sujeto a un salto de presión externo constante. Estos suelen poseer nodos inestables o puntos de retorno (*saddle-node bifurcation point*) (Dorning, 1989). Es por este motivo que los diagramas de bifurcación de las variables en función de un parámetro presentan forma de S o efectos de histéresis, como se puede observar en la Fig. 1, correspondiendo la rama intermedia inestable a la inestabilidad de Ledinegg.

En muchos casos el punto fijo de la rama inferior (ver Fig. 1) pierde su estabilidad a través de una bifurcación de Hopf supercrítica (Dorning, 1989) conduciendo a las conocidas ondas de densidad, proyectando un ciclo límite en el espacio de las fases. De este modo este punto fijo se convierte en un foco inestable que da origen a un atractor periódico en este sistema disipativo dinámico. Es posible también que el punto fijo anterior pierda su estabilidad a través de una bifurcación subcrítica, teniendo entonces las oscilaciones características divergentes y siendo de esperar que otras no linealidades entren posteriormente en juego.

En este trabajo se presenta un modelo algebraico bidimensional en demoras de la dinámica de canales de dos fases en ebullición tanto horizontales como verticales. Su simplicidad permite un tratamiento

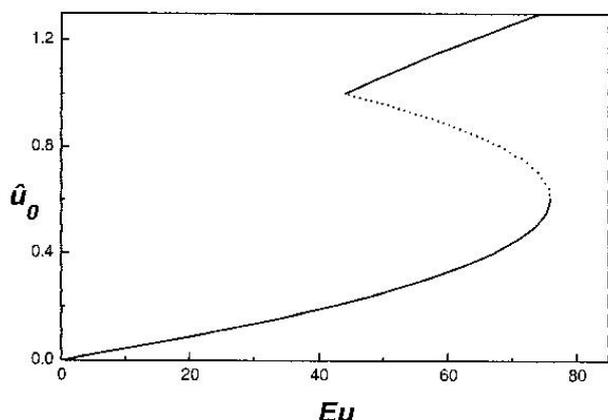


Fig. 1.- Diagrama de bifurcación de un canal en ebullición.

completamente analítico del problema, tanto lineal como no lineal, preservando una descripción realista de los principales mecanismos involucrados. Utilizando métodos perturbativos se identificaron cuencas de estabilidad asociadas a bifurcaciones de Hopf de ambos tipos, subcríticas y supercríticas, estableciéndose un criterio analítico para la transcripción de uno a otro tipo. Se observa un efecto inestabilizante del término gravitatorio sobre los márgenes de estabilidad ante ondas de densidad y además se extiende el carácter subcrítico de esta bifurcación hacia subenfriamientos más altos.

### Modelo de canal en ebullición

Consideremos el canal en ebullición esquematizado en la Fig. 2. En él, el líquido ingresa subenfriado a temperatura constante y es calefaccionado uniformemente a lo largo del canal. En una cierta posición el fluido alcanza su temperatura de saturación y comienza a hervir, saliendo del canal como una mezcla bifásica.

Se asumieron las siguientes hipótesis en el modelado del flujo bifásico (Delmastro et al. 1998):

- El flujo es homogéneo (ambas fases tienen igual velocidad, es decir, sin deslizamiento).
- La presión del sistema es constante.
- El flujo de calor es constante en espacio y tiempo.

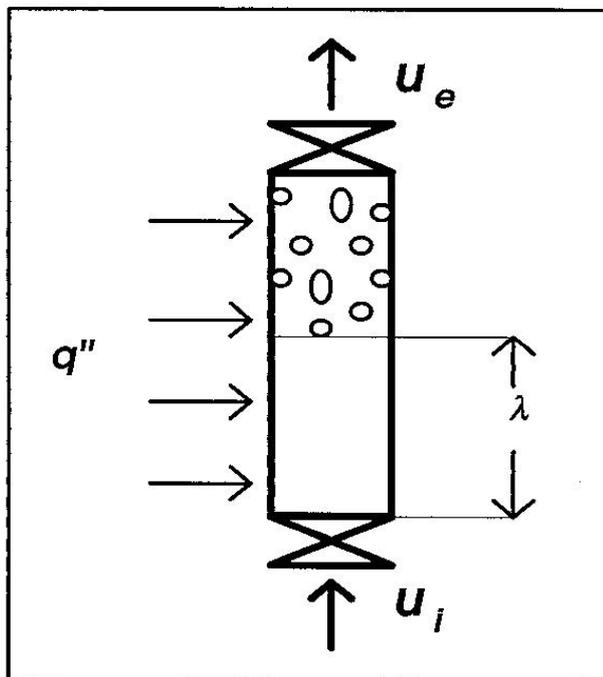


Fig. 2.- Canal en ebullición.

- Ambas fases son incompresibles.
- Las fases se encuentran en equilibrio termodinámico.
- Los términos de disipación viscosa y de generación interna de calor son despreciables en la ecuación de energía.
- La fricción se considera solamente concentrada sobre la entrada y la salida del canal.

Sobre estas hipótesis, las ecuaciones unidimensionales de conservación de masa y energía se pueden escribir como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho hu)}{\partial z} = q \quad (1b)$$

La entalpía y la densidad se pueden relacionar por la siguiente ecuación de estado:

$$\rho = \rho_f, \quad \text{si } h \leq h_f \quad (2a)$$

$$\rho = \left[ v_f + \frac{(h - h_f)}{h_{fg}} v_{fg} \right]^{-1} \quad \text{si } h > h_f. \quad (2b)$$

Combinando las ecuaciones (1b) y (2b) obtenemos para la región de dos fases:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = q \frac{v_{fg}}{h_{fg}} \equiv \Omega \quad (3a)$$

Similarmente, para la región de una fase:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3b)$$

Integrando las ecuaciones (3) a lo largo del canal:

$$u_e = u_i + \Omega (L_{ch} - \lambda) \quad (4)$$

siendo la longitud de líquido subenfriado

$$\lambda(t) = \int_{t-v}^t u_i(t') dt' \quad (5)$$

En ésta,  $v$  es el tiempo necesario para que una partícula ingresante al canal alcance su temperatura de saturación:

$$v = \frac{\Delta h_{sub} \rho_f}{q} \quad (6)$$

Para bajas frecuencias podemos aproximar (Juanicó, 1998; Clausse et al., 2000):

$$\lambda(t) \equiv v u_i(t-v/2) \quad (7)$$

Asumiendo un balance cuasiestático de fuerzas en la ecuación de momento, el salto de presión impuesto externamente al canal se balancea con las fuerzas de fricción, gravedad y aceleración, esto es

$$(k_i - 1)\rho_f u_i^2 + (k_e + 1)\rho_e u_e^2 + \frac{M_{ch} g}{A_{xs}} = \Delta p \quad (8)$$

Si siguiendo la aproximación cuasiestática, podemos asumir que el flujo saliente sigue la historia del flujo ingresante al canal (Clausse et al., 1995) siendo:

$$\rho_e(t) u_e(t) = \rho_f u_i(t - \tau) \quad (9)$$

donde  $\tau$  es una dada demora de transporte. Esta demora puede ser razonablemente reemplazada por  $v$  si el tiempo de residencia

en la región de dos fases es pequeño, (i.e. altos subenfriamientos de entrada).

En este caso, la densidad promedio en la región bifásica está próxima a su valor de salida,  $\rho_e$ , y la masa dentro del canal puede aproximarse como (Delmastro y Juanicó, 1998):

$$M_{ch} = A_{xs} \rho_f [\lambda + u_i(t-v)/\Omega] \quad (10)$$

Las ecuaciones (4), (7), (8), (9) y (10) pueden ser combinadas en una única ecuación en demoras que relaciona los valores de la velocidad a la entrada,  $u_i$ , en tres instantes diferentes:  $t$ ,  $t-v/2$  and  $t-v$ .

Escribiendo este mapeo bidimensional en forma adimensional, usando los valores de referencia:  $L_r = L_{ch}$ ,  $u_r = L_r/v$  y  $\rho_r = \rho_f$  obtenemos la siguiente expresión:

$$k \hat{u}_i^2(t) + \hat{u}_i(t-v) \left[ \hat{u}_i(t) + N_{sub} (1 - \hat{u}_i(t-v/2)) \right] + N_g \left[ \hat{u}_i(t-v/2) + \frac{\hat{u}(t-v)}{N_{sub}} \right] = \frac{Eu}{k_e + 1} \quad (11)$$

### Análisis de estabilidad lineal

Los puntos fijos del mapeo bidimensional dado por la ecuación (11) se pueden obtener sustituyendo  $\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0$ . El parámetro  $\hat{u}_0$  representa la fracción subenfriada del canal, esto es:

$$\hat{u}_0 = \frac{\lambda_0}{L_{ch}} = \frac{N_{sub}}{N_{pch}}$$

Linearizando la ecuación (11) alrededor de un punto fijo, obtenemos la siguiente ecuación característica:

$$\left[ (2k + 1)\hat{u}_0 \right] x^2 + (Ng - N_{sub} \hat{u}_0) x + \left[ \hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0) + \frac{Ng}{N_{sub}} \right] = 0 \quad (12)$$

donde  $x = e^{\alpha \tau}$ .

El sistema se encuentra marginalmente estable en  $\hat{u}_0$  si  $x$  es un punto sobre el círculo unitario en el plano complejo. Dependiendo del carácter de  $x$  (i.e., real o complejo) el sistema pierde su estabilidad oscilatoriamente (autovalores complejos) o excursivamente (autovalores reales).

**Inestabilidad de Ondas de Densidad.** Para autovalores complejos el margen de inestabilidad se establece en:

$$\hat{u}_0^{dw} = \frac{N_{sub} + Ng/N_{sub}}{N_{sub} + 2k} \quad (13)$$

Esta inestabilidad presenta un carácter oscilatorio, que se manifiesta en ondas de densidad viajando a lo largo del canal, dando su nombre al fenómeno.

**Inestabilidad excursiva o de Ledinegg.** Para autovalores reales se presenta un punto de ensilladura cuando el mayor autovalor  $x$  es mayor que 1. En este caso, el sistema alcanza la inestabilidad excursiva o de Ledinegg (Lahey and Moody, 1977). Esta última condición implica que

$$\hat{u}_0^{led} = \frac{N_{sub} + Ng + \frac{Ng}{N_{sub}}}{2(N_{sub} - k - 1)} \quad (14)$$

el punto donde las ecuaciones (13) y (14) se interceptan corresponde a la transición de autovalores inestables complejos a reales:

$$\hat{u}_0^{dw-led} = \frac{2\left(N_{sub} + \frac{Ng}{N_{sub}}\right) + Ng}{3N_{sub} - 2} \quad (15)$$

**Mapas de Estabilidad Lineal.** Los criterios de estabilidad, dados por las ecuaciones (13) y (14) se ilustran en el plano biparamétrico ( $N_{sub}, N_{pch}$ ) de la Fig. 3. Se considera tanto el caso de un canal horizontal ( $Ng=0$ ) como uno vertical con un término gravitatorio apreciable ( $Ng=10$ ). Nótese de ellas que el término gravitatorio causa un efecto inestabilizante sobre las inestabilidades de ondas de densidad y un efecto estabilizante sobre las inestabilidades de Ledinegg.

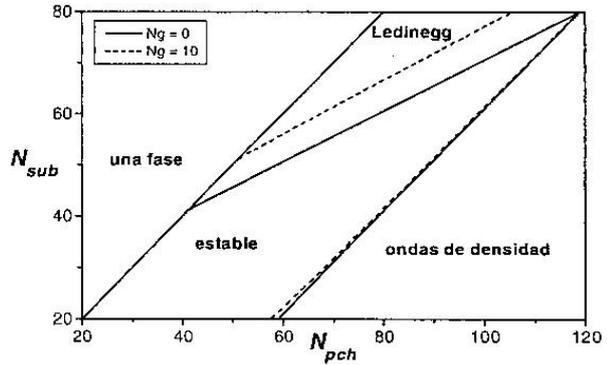


Fig. 3.- Mapa de estabilidad lineal.

Comparando los mapas de estabilidad lineal de este modelo algebraico con el completamente diferencial (Delmastro *et al.*, 1991 y 1998a), encontramos buen acuerdo para un amplio rango de números de subenfriamiento y gravitatorio.

**Frecuencia Lineal.** Consideremos que el sistema se encuentra bajo condiciones marginalmente inestables (autovalores complejos). La frecuencia angular,  $\hat{\omega}$ , puede entonces evaluarse a partir de los valores de los autovalores,  $x$ . Siendo  $x = \exp(\alpha v / 2)$ , entonces

$$\hat{\omega} = \omega v = 2 \arccos (Re) \quad (16)$$

donde  $Re$  es la parte real de los autovalores complejos calculada sobre el límite lineal. Es decir:

$$\hat{\omega} = 2 \arccos \left[ \frac{N_{sub} - \frac{Ng(2k + N_{sub})}{N_{sub} + \frac{Ng}{N_{sub}}}}{2(2k + 1)} \right] \quad (17)$$

La frecuencia angular adimensional, dada por la ecuación (17) se grafica en la Fig. 4. Se observa allí que la gravedad incrementa los valores de la frecuencia para un dado subenfriamiento. Esta tendencia también fue observada experimentalmente (Juanicó, 1998).

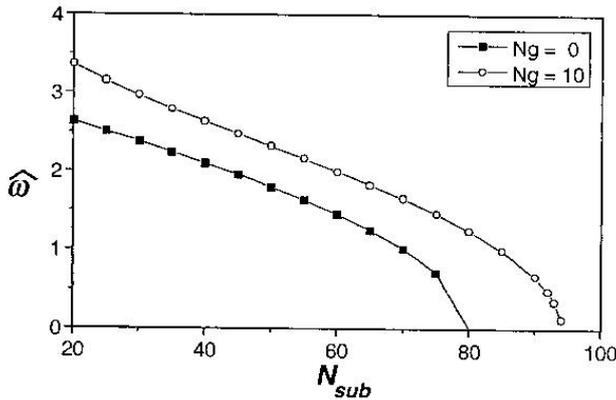


Fig. 4.- Frecuencia lineal angular adimensional ( $k = 19.5$ ).

### Bifurcación de Hopf

Consideremos que el sistema se encuentra en condiciones marginalmente estables (autovalores complejos), en cuyo caso el valor de  $k$ ,  $k_0$ , viene determinado de (13), como:

$$k_0 = \frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0)}{2\hat{u}_0} + \frac{Ng/N_{sub}}{2\hat{u}_0} \quad (18)$$

Cuando  $k$  es menor que  $k_0$ , la solución estacionaria pierde estabilidad. El teorema de la bifurcación de Hopf establece que encontraremos una solución periódica que se bifurca desde  $\hat{u}_0$  si

$$\alpha|_{\mu=0} = -\bar{\alpha}|_{\mu=0} \neq 0,$$

$$\text{Re} \left[ \frac{d\alpha}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \right] \neq 0,$$

donde  $\alpha$  viene de resolver la (12), es decir:

$$\alpha = -\frac{1}{\tau} \log x \text{ y } \mu = k - k_0. \quad (19)$$

Reemplazando  $x$  obtenido de resolver la ecuación (12) en (19), obtenemos

$$\alpha|_{\mu=0} = -\bar{\alpha}|_{\mu=0} = \frac{j \arctan \left( \frac{Im}{Re} \Big|_{\mu=0} \right)}{\tau} \neq 0, \quad (20a)$$

$$\text{Re} \left[ \frac{d\alpha}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \right] < 0 \quad (20b)$$

donde  $Re$  e  $Im$  son las partes real e imaginaria de  $x$  calculadas sobre el límite lineal, es decir:

$$Re = \frac{N_{sub} \hat{u}_0 - Ng}{2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0) + Ng/N_{sub}]}, \quad (21a)$$

$$Im = \sqrt{1 - \left\{ \frac{N_{sub} \hat{u}_0 - Ng}{2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0) + Ng/N_{sub}]} \right\}^2} \quad (21b)$$

Entonces, es posible encontrar una bifurcación en nuestra ecuación en demoras. Para investigar ésta, consideraremos la forma «local», o perturbada, de la ecuación (11):

$$(k_0 + i)(2\hat{u}_0 \ddot{a}_0 + \dot{a}_0^2) + \hat{u}_0(\ddot{a}_0 + \ddot{a}_2) + \ddot{a}_0 \ddot{a}_2 - N_{sub}[\hat{u}_0(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1 \delta_2 - \delta_2] + Ng \left( \delta_1 + \frac{\delta_2}{N_{sub}} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\text{donde } \hat{u}_n = \hat{u}_0 + \delta_0, \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_0 + \delta_1 \text{ y } \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0 + \delta_2.$$

Escribiendo  $\delta_n = \epsilon y_n$ , donde  $\epsilon$  es un parámetro pequeño, obtenemos

$$(k_0 + \mu)(2\hat{u}_0 y_0 + \epsilon y_0^2) + \hat{u}_0(y_0 + y_2) + \epsilon y_0 y_2 - N_{sub}[\hat{u}_0(y_1 + y_2) + \epsilon y_1 y_2 - y_2] + Ng \left( y_1 + \frac{y_2}{N_{sub}} \right) = 0 \quad (23)$$

Expandiendo ahora las siguientes expresiones

$$\mu = \mu_{(1)} \epsilon + \mu_{(2)} \epsilon^2 + \dots \quad (24a)$$

$$t = \theta \left( \frac{1}{\omega_c} + \tau_{(1)} \epsilon + \tau_{(2)} \epsilon^2 + \dots \right) \quad (24b)$$

$$y_0 = y_{0(0)} + y_{0(1)} \epsilon + y_{0(2)} \epsilon^2 + \dots \quad (24c)$$

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(1)} \epsilon + y_{1(2)} \epsilon^2 + \dots \quad (24d)$$

$$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(1)} \epsilon + y_{2(2)} \epsilon^2 + \dots \quad (24e)$$

donde  $\omega_c = Im(\alpha)$ .

La expansión en serie de la variable temporal introducida en (24b) implica sobre las demoras:

$$y_{1(\omega)} = y_{0(\omega)} \left( \theta - \frac{\tau}{\omega_c^{-1} + \chi} \right) = y_{0(\omega)} (\theta - \tau\omega_c) + \left. \frac{dy_{0(\omega)}(\theta - \tau\omega_c)}{d\chi} \right|_{\chi=0} \chi + \left. \frac{d^2 y_{0(\omega)}(\theta - \tau\omega_c)}{d\chi^2} \right|_{\chi=0} \chi^2 + \dots \quad (25a)$$

$$y_{2(\omega)} = y_{0(\omega)} \left( \theta - \frac{2\tau}{\omega_c^{-1} + \chi} \right) = y_{0(\omega)} (\theta - 2\tau\omega_c) + \left. \frac{dy_{0(\omega)}(\theta - 2\tau\omega_c)}{d\chi} \right|_{\chi=0} \chi + \left. \frac{d^2 y_{0(\omega)}(\theta - 2\tau\omega_c)}{d\chi^2} \right|_{\chi=0} \chi^2 + \dots \quad (25b)$$

donde  $\chi = \tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2 \dots$ .

En adelante redefiniremos

$$y_{1(\omega)} = y_{0(\omega)} (\theta - \tau\omega_c) \quad (26a)$$

$$y_{2(\omega)} = y_{0(\omega)} (\theta - 2\tau\omega_c) \quad (26b)$$

Combinando las (23) a (25) obtenemos:

$$L_0(y_{n(\omega)}) = 0, \quad (27a)$$

$$L_0(y_{n(1)}) = S_{(1)}, \quad (27b)$$

$$L_0(y_{n(2)}) = S_{(2)}. \quad (27c)$$

La derivación de las funciones  $L_0$  y  $S_{(l)}$  se encuentra desarrollada en el Apéndice.

Para buscar soluciones periódicas, (con período  $2\pi$ ), ésta nos impone la condición de ortogonalidad siguiente:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_{n(l)} e^{-j\theta} d\theta = 1 \quad (28)$$

Recordando que

$$\delta_n = \varepsilon y_n = \varepsilon (y_{n(\omega)} + y_{n(1)} \varepsilon + y_{n(2)} \varepsilon^2 + \dots),$$

entonces la (28) implica

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_n e^{-j\theta} d\theta = 1 \quad (29)$$

La condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones (27) tengan una solución periódica es bien conocida como "alternativa de Fredholm":

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_{(l)} e^{-j\theta} d\theta = 1 \quad (30)$$

Una solución (real) que satisface las ecuaciones (27a) y (28) es

$$y_{0(\omega)} = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (31)$$

la cual junto con las (25) determinan las soluciones demoradas  $y_{1(\omega)}$  y  $y_{2(\omega)}$ .

Para  $l = 0$ , siendo  $S_{(0)} = 0$ , la ecuación (30) se satisface trivialmente. Para  $l = 1$ , la (30) implica

$$-k_0 \int_0^{2\pi} y_{0(\omega)}^2 e^{-j\theta} d\theta - 2\hat{u}_0 \mu_{(1)} \int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} e^{-j\theta} d\theta -$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} y_{2(\omega)} e^{-j\theta} d\theta + N_{sub} \int_0^{2\pi} y_{1(\omega)} y_{2(\omega)} e^{-j\theta} d\theta +$$

$$\tau\omega_c^2 \tau_{(1)} \left( N_{sub} \hat{u}_0 - Ng \right) \int_0^{2\pi} \frac{dy_{1(\omega)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta -$$

$$2 \left( \hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0) + \frac{Ng}{N_{sub}} \right) \int_0^{2\pi} \frac{dy_{2(\omega)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta = 0 \quad (32)$$

Combinando las ecuaciones (25a,b), (26a,b), y (31), obtenemos,

$$\int_0^{2\pi} y_{0(\omega)}^2 e^{-j\theta} d\theta = 0, \quad (33a)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = \pi, \quad (33b)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy_{1(\omega)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta = -\pi\tau\omega_c^2 j. \quad (33c)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy_{2(\omega)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta = -2\pi\tau\omega_c^2 j \quad (33d)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} y_{2(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = 0 \quad (33e)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{1(\omega)} y_{2(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = 0 \quad (33f)$$

Partiendo de las (32) y (33) se deduce que  $\mu_{(l)} = \tau_{(l)} = 0$ .

Para  $l = 2$ , la ecuación (27c), junto con  $\mu_{(l)} = \tau_{(l)} = 0$ , implica

$$\begin{aligned} & -2k_0 \int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} y_{0(\omega)} e^{-j\theta} d\theta - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} \int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} e^{-j\theta} d\theta \\ & - \int_0^{2\pi} (y_{0(\omega)} y_{2(\omega)} + y_{0(\omega)} y_{2(\omega)}) e^{-j\theta} d\theta - \\ & 2 \left[ \hat{u}_0 + N_{sub} (I - \hat{u}_0) + \frac{Ng}{N_{sub}} \right] \tau \omega_c^2 \tau_{(2)} \times \\ & \int_0^{2\pi} \frac{dy_{2(\omega)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta + \\ & (N_{sub} \hat{u}_0 - Ng) \tau \omega_c^2 \tau_{(2)} \int_0^{2\pi} \frac{dy_{1(\omega)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta \\ & + N_{sub} \int_0^{2\pi} (y_{1(\omega)} y_{2(\omega)} + y_{2(\omega)} y_{1(\omega)}) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Introduciremos una solución (real) de  $y_{0(l)}$ , la cual satisface las ecuaciones (30) y (34), de la forma

$$y_{0(l)} = a + b e^{j\theta} + \bar{b} e^{-j\theta} + c e^{2j\theta} + \bar{c} e^{-2j\theta} \quad (35)$$

En ésta, el parámetro  $a$  es real y  $b$  y  $c$  son complejos. Las magnitudes demoradas correspondientes a la solución introducida son:

$$y_{1(\omega)} = a + b e^{j(\theta - \tau\omega_c)} + \bar{b} e^{-j(\theta - \tau\omega_c)} + c e^{2j(\theta - \tau\omega_c)} + \bar{c} e^{-2j(\theta - \tau\omega_c)} \quad (36a)$$

$$y_{1(\omega)} = a + b e^{j(\theta - \tau\omega_c)} + \bar{b} e^{-j(\theta - \tau\omega_c)} + c e^{2j(\theta - 2\tau\omega_c)} + \bar{c} e^{-2j(\theta - 2\tau\omega_c)} \quad (36b)$$

Usando las ecuaciones (32), (35) y (36) podemos calcular:

$$\int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} y_{0(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a + c) \quad (37a)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{2(\omega)} y_{0(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a + c e^{-4\tau\omega_c j}) \quad (37b)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{1(\omega)} y_{2(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-4\tau\omega_c j} + c) \quad (37c)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{2(\omega)} y_{1(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-\tau\omega_c j} + c e^{-3\tau\omega_c j}) \quad (37d)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0(\omega)} y_{2(\omega)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-2\tau\omega_c j} + c e^{2\tau\omega_c j}) \quad (37e)$$

Reemplazando las ecuaciones (33c,d) y (37) en la (34), obtenemos la condición de Fredholm sobre  $l = 2$ :

$$\begin{aligned} & -2k_0(a + c) - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} - (a + c e^{-4\tau\omega_c j}) + \\ & + N_{sub} (a e^{-2\tau\omega_c j} + c) \\ & + N_{sub} (a e^{-2\tau\omega_c j} + c e^{-3\tau\omega_c j}) - \\ & (a e^{-2\tau\omega_c j} + c e^{2\tau\omega_c j}) \\ & + \left\{ -2 \left[ \hat{u}_0 + N_{sub} (I - \hat{u}_0) + \frac{Ng}{N_{sub}} \right] e^{-2\tau\omega_c j} + \right. \\ & \left. + (N_{sub} \hat{u}_0 - Ng) e^{-\tau\omega_c j} \right\} \tau \omega_c^2 \tau_{(2)} j = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Los coeficientes  $a$  y  $c$  pueden ser calculados combinando las ecuaciones (35) y (27b), siendo:

$$a = \frac{\left[ \frac{N_{sub}(I - \hat{u}_0) + \frac{Ng}{N_{sub}}}{\hat{u}_0} + \left[ (e^{2\tau\omega_c j} + e^{-2\tau\omega_c j}) - N_{sub} (e^{\tau\omega_c j} + e^{-\tau\omega_c j}) \right] \right]}{4 \left[ 2 \left( \frac{N_{sub} + \hat{u}_0 + \frac{Ng}{N_{sub}}}{N_{sub}} \right) - 3N_{sub} \hat{u}_0 + Ng \right]}, \quad (39a)$$

**Análisis y discusión de los resultados**

La ecuación (40) constituye un resultado importante concerniente a las propiedades no lineales del modelo en demoras de la dinámica de canales bifásicos presentado en este trabajo. En primer lugar, el signo de  $\mu_{(2)}$  determina el carácter de la bifurcación. Dado que

$Re[\partial\alpha(\mu = 0)/\partial\mu] < 0$ , el criterio es  
 $\mu_{(2)} > 0 \Rightarrow$  bifurcación subcrítica,  
 $\mu_{(2)} < 0 \Rightarrow$  bifurcación supercrítica.

Bajo condiciones subcríticas, dentro de la región linealmente inestable el sistema se vuelve inestable ante excitaciones de cualquier amplitud. Más aún, éste es también inestable en alguna región linealmente estable ante excitaciones de amplitud suficientemente grandes. Por otra parte, un sistema supercrítico es siempre estable dentro de la región del margen de estabilidad lineal, y exhibe soluciones periódicas finitas (ciclos límites) dentro de alguna región de inestabilidad lineal (Lahey, 1986). En la Fig. 5 se representan los distintos comportamientos y sus regiones, asociados a las cuencas de Hopf subcríticas y supercríticas. La condición límite  $\mu_{(2)} = 0$ , representa el punto de transcripción donde el sistema muda de subcrítico a supercrítico. Éste determina una curva en el espacio paramétrico  $(N_{sub}, \hat{u}_0)$ :

$$f(N_{sub}, Ng, \hat{u}_0) = 0 \tag{41}$$

Se resolvió numéricamente esta ecuación para distintos  $Ng$  como se muestra en la Fig. 6. En ésta puede verse el aumento de la cuenca dinámica subcrítica hacia subenfriamientos mayores, conforme se incrementa el término gravitatorio. Cabe destacar no obstante, que independientemente del valor de éste, para números de subenfriamientos grandes el carácter de la bifurcación está determinado sólo por el valor de  $\hat{u}_0$ , verificándose que:

$$\lim_{N_{sub} \rightarrow \infty} \hat{u}_0(\mu_{(2)}) = 1/2.$$

$\forall Ng < \infty$

$$c = \frac{\left( \frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0) + \frac{Ng}{N_{sub}}}{8\hat{u}_0} \right) e^{2\tau\omega_c} + \frac{1 - N_{sub}e^{-\tau\omega_c}}{4}}{\left( N_{sub}(1-\hat{u}_0) + \hat{u}_0 + \frac{Ng}{N_{sub}} \right) 2 \cos(2\tau\omega_c) + (Ng - N_{sub})} \tag{39b}$$

Combinando las ecuaciones (38) y (39) se obtiene la siguiente expresión analítica para el coeficiente  $\mu_{(2)}$ :

$$\begin{aligned} 2\hat{u}_0\mu_{(2)} = & -\frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0) + Ng/N_{sub}}{\hat{u}_0} (a+c_1) - \\ & c_1(Re^4 - 6Re^2Im^2 + Im^4) - a \\ & + 4c_2(Re^3Im - ReIm^3) + N_{sub}a(Re^2 - Im^2) + \\ & + N_{sub}(c_1 + aRe) \\ & + N_{sub}c_1(Re^3 - 3ReIm^2) - \\ & N_{sub}c_2(3Re^2Im - Im^3) - 2c_2ReIm \\ & - (a+c_1)(Re^2 - Im^2) + Im[Ng - N_{sub}\hat{u}_0 + \\ & 4Re\{\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0) + Ng/N_{sub}\}] \\ & \left[ \frac{(N_{sub}(1-\hat{u}_0) + Ng/N_{sub})c_2}{\hat{u}_0} - N_{sub}c_2 - \right. \\ & N_{sub}c_1(3Re^2Im - Im^3) - aN_{sub}Im \\ & - N_{sub}c_2(Re^3 - 3ReIm^2) + 4c_1(Re^3Im - ReIm^3) + \\ & \cdot c_2(Re^2 - Im^2) \\ & + c_2(Re^4 - 6Re^2Im^2 + Im^4) + \\ & \cdot 2(a-c_1)ReIm - 2aN_{sub}ReIm \left. \right] / \\ & \left\{ N_{sub}\hat{u}_0 - Ng \right\} Re - \left[ \hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0) + \right. \\ & \left. Ng/N_{sub} \right] 2(Re^2 - Im^2) \Big\} \equiv f(N_{sub}, Ng, \hat{u}_0) \tag{40} \end{aligned}$$

donde  $c$  fue separado en su parte real e imaginaria como  $c = c_1 + j c_2$ .

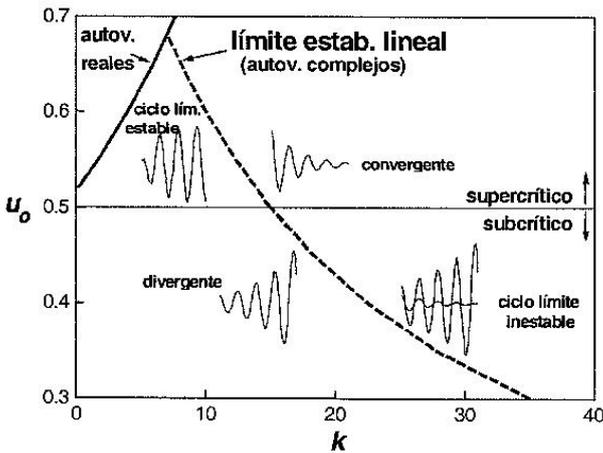


Fig. 5.- Esquema de comportamientos no lineales ( $N_{sub} = 30, N_g = 0$ ).

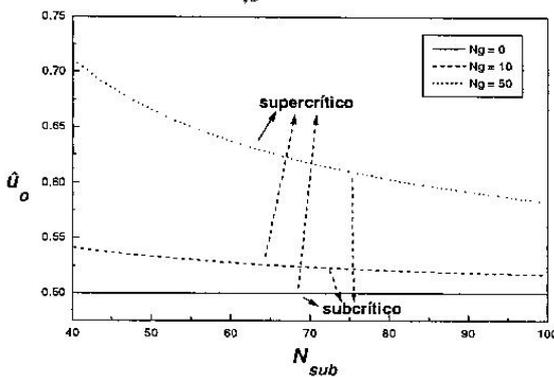


Fig. 6.- Carácter de la bifurcación de Hopf para distintos  $N_g$ .

Otra aplicación de la ecuación (40) es el cálculo de la amplitud de los ciclos límites (en bifurcaciones supercríticas), o alternativamente el tamaño de la mínima perturbación que dispara la inestabilidad dentro del dominio de estabilidad lineal (en bifurcaciones subcríticas). Tomando sólo los términos de menor (segundo) orden en las ecuaciones (24) se pueden expresar:

$$\mu = \mu_{(2)} \epsilon^2, \quad (42a)$$

$$\theta = \omega_c t, \quad (42b)$$

$$y_0 = y_{0(0)} = \cos \theta, \quad (42c)$$

$$\delta_0 = \epsilon y_0. \quad (42d)$$

Combinando las ecuaciones (40) y (42), la amplitud relativa de la perturbación

puede ser relacionada con el apartamiento de  $k$  desde el límite lineal,  $k_0$ , por:

$$\frac{\|\delta_0\|^2}{\hat{u}_0^2} = \frac{I(\mu)}{R(k_0)}, \quad (43)$$

donde  $R$  se define como:

$$R = \frac{\hat{u}_0^2}{N_{sub}(1-\hat{u}_0) + Ng/N_{sub}} f(N_{sub}, Ng, \hat{u}_0) \quad (44)$$

El significado de  $R$  puede ser deducido de la ecuación (43). Para bifurcaciones subcríticas ( $R > 0$ ), cuanto más alto sea el valor de  $R$ , menor lo será la perturbación requerida para desestabilizar una condición linealmente estable. Por lo tanto, en regiones estables donde  $R$  es alto, debería prestarse atención especial a la respuesta del sistema ante perturbaciones de amplitud finita. Por otra parte, para bifurcaciones supercríticas ( $R < 0$ ), cuanto más bajo sea el valor de  $R$ , otro tanto lo será la amplitud del ciclo límite. Por consiguiente, en regiones inestables donde  $R$  es bajo, la respuesta del sistema podría ser aceptable para el diseño, cuando las oscilaciones se mantuviesen dentro de los rangos controlables. En general  $R$  puede ser visto como un indicador de «riesgo», en el sentido de que mayores  $R$  implican situaciones más peligrosas.

En las Fig. 7 se ilustra la dependencia de  $R$  con  $N_{sub}$  para diferentes  $\hat{u}_0$  y para dos  $N_g$  distintos. Se observa, en concordancia con el aumento de subcriticidad antes notado, que incrementando  $N_g$  aumenta el «riesgo» del sistema.

Similarmente al factor antes estudiado, para  $N_{sub}$  grandes  $R, R_\infty$ , depende únicamente de  $\hat{u}_0$ . Este límite fue analíticamente calculado y se refleja su comportamiento en la Fig. 8. Hay dos resultados interesantes a destacar:

- máximo ( $R_\infty$ ) = 0.201, ocurre en  $\hat{u}_0 = 0.211$ .
- $\lim_{\hat{u}_0 \rightarrow 0} R_\infty = 0.1875$ .

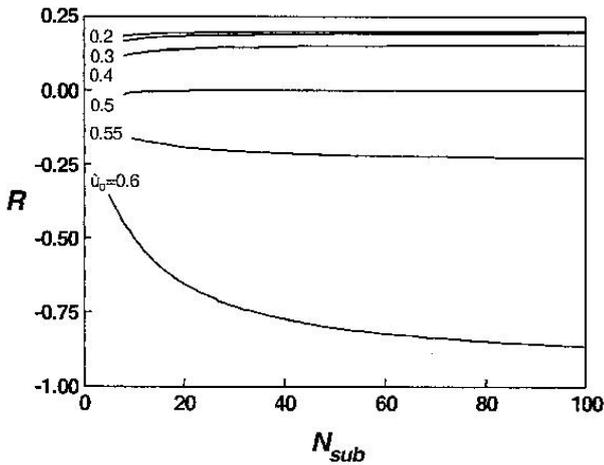


Fig. 7a.- Indicador de riesgo para distintos  $\hat{u}_0$  y  $Ng = 0$ .

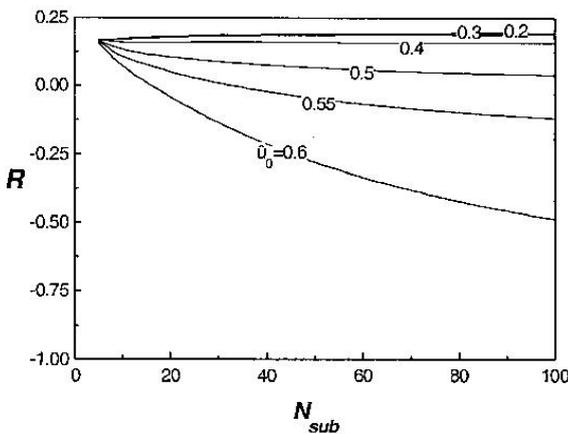


Fig. 7b.- Indicador de riesgo para distintos  $\hat{u}_0$  y  $Ng = 10$ .

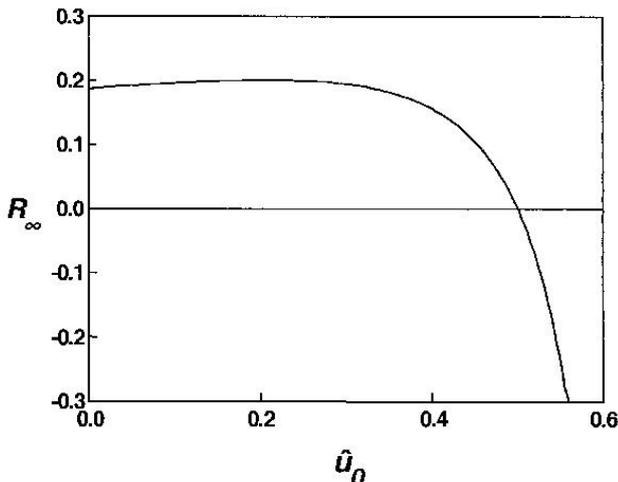


Fig. 8.- Indicador de riesgo para  $N_{sub}$  grandes.

### Conclusiones

Se derivó un modelo matemático de la dinámica de flujos bifásicos en canales verticales u horizontales, basado en ecuaciones en demoras a partir de las ecuaciones de conservación de una mezcla bifásica homogénea. Se obtuvo así un mapeo bidimensional como resultado de asumir demoras de transporte constantes a lo largo del canal. La estabilidad de la dinámica discreta fue analizada perturbando linealmente alrededor del estado estacionario. Se encontraron soluciones oscilatorias y excursivas, correspondientes a inestabilidades del tipo de ondas de densidad y de Ledinegg respectivamente.

Las características de las inestabilidades oscilatorias fueron estudiadas usando métodos perturbativos de Hopf. El análisis permitió identificar cuencas dinámicas asociadas a bifurcaciones de Hopf subcríticas y supercríticas. Fue posible describir en forma analítica el comportamiento no lineal del sistema usando una función de "riesgo", la cual provee una medida de la amplitud de los ciclos límites (estables o inestables).

En suma, la gravedad tiene un efecto inestabilizante sobre la dinámica de canales en ebullición frente al fenómeno de ondas de densidad. Se reducen los márgenes de estabilidad lineal y además se acentúa el carácter no conservativo del análisis lineal de estabilidad.

### Apéndice

Combinando las ecuaciones (23) a (25) obtenemos:

$$\begin{aligned} & (k_0 + \mu_{(1)}\epsilon + \mu_{(2)}\epsilon^2 + \dots) \left[ 2\hat{u}_0 (y_{0(0)} + y_{0(1)}\epsilon + \right. \\ & \left. y_{0(2)}\epsilon^2 + \dots) + \epsilon (y_{0(0)}^2 + 2\epsilon y_{0(0)} y_{0(1)} + \dots) \right] + \\ & \hat{u}_0 (y_{0(0)} + y_{0(1)}\epsilon + y_{0(2)}\epsilon^2 + \dots) + \epsilon (y_{0(0)} + y_{0(1)}\epsilon + \end{aligned}$$

$$\left. y_{0(2)}\epsilon^2 + \dots \left[ y_{2(0)} + \frac{dy_{2(0)}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \dots) + y_{2(1)}\epsilon + \dots \right] + \right.$$

$$+ \hat{u}_0 \left[ y_{2_{(0)}} + \frac{dy_{2_{(0)}}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \tau_{(2)}\epsilon^2) + \frac{d^2 y_{2_{(0)}}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \epsilon^2 + \dots \right] \times \left[ y_{2_{(0)}} + \frac{dy_{2_{(0)}}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \dots) + y_{2_{(1)}}\epsilon + \dots \right] \quad (45)$$

$$y_{2_{(1)}}\epsilon + \frac{dy_{2_{(1)}}}{d\chi} \tau_{(1)}\epsilon^2 + y_{2_{(2)}}\epsilon^2 + \dots \left. \right] +$$

$$Ng \left[ y_{1_{(0)}} + y_{1_{(1)}}\epsilon + \frac{dy_{1_{(0)}}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \tau_{(2)}\epsilon^2) + \right.$$

$$\left. \frac{d^2 y_{1_{(0)}}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \epsilon^2 + \frac{dy_{1_{(1)}}}{d\chi} \tau_{(1)}\epsilon^2 + y_{1_{(2)}}\epsilon^2 + \dots \right]$$

$$- N_{sub} \hat{u}_0 \left[ y_{1_{(0)}} + y_{1_{(1)}}\epsilon + \frac{dy_{1_{(0)}}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \tau_{(2)}\epsilon^2) + \right.$$

$$\left. \frac{d^2 y_{1_{(0)}}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \epsilon^2 + \frac{dy_{1_{(1)}}}{d\chi} \tau_{(1)}\epsilon^2 + y_{1_{(2)}}\epsilon^2 + \dots \right]$$

$$+ N_{sub} \left[ y_{2_{(0)}} + \frac{dy_{2_{(0)}}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \tau_{(2)}\epsilon^2) + \frac{d^2 y_{2_{(0)}}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \epsilon^2 + \dots \right.$$

$$\left. y_{2_{(1)}}\epsilon + \frac{dy_{2_{(1)}}}{d\chi} \tau_{(1)}\epsilon^2 + y_{2_{(2)}}\epsilon^2 + \dots \right] (1 - \hat{u}_0)$$

$$+ \frac{Ng}{N_{sub}} \left[ y_{2_{(0)}} + \frac{dy_{2_{(0)}}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \tau_{(2)}\epsilon^2) + \right.$$

$$\left. \frac{d^2 y_{2_{(0)}}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \epsilon^2 + y_{2_{(1)}}\epsilon + \right.$$

$$\left. \frac{dy_{2_{(1)}}}{d\chi} \tau_{(1)}\epsilon^2 + y_{2_{(2)}}\epsilon^2 + \dots \right]$$

$$- N_{sub} \epsilon \left[ y_{1_{(0)}} + \frac{dy_{1_{(0)}}}{d\chi} (\tau_{(1)}\epsilon + \dots) + y_{1_{(1)}}\epsilon + \dots \right]$$

Colectando en potencias de  $\epsilon$ , obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones: ( $\epsilon^0$ )

$$(2k_0 + 1)\hat{u}_0 y_{0_{(0)}} + \hat{u}_0 y_{2_{(0)}} + N_{sub} [(1 - \hat{u}_0) y_{2_{(0)}} - \hat{u}_0 y_{1_{(0)}}] + Ng \left( y_{1_{(0)}} + \frac{y_{2_{(0)}}}{N_{sub}} \right) = 0, \quad (46a)$$

o,  $L_0(y_{n_{(0)}}) = 0$ .

( $\epsilon^1$ ):

$$(2k_0 + 1)\hat{u}_0 y_{0_{(1)}} - N_{sub} \hat{u}_0 y_{1_{(1)}} + [\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)] y_{2_{(1)}} + Ng \left( y_{1_{(1)}} + \frac{y_{2_{(1)}}}{N_{sub}} \right) =$$

$$- k_0 y_{0_{(0)}}^2 - 2\hat{u}_0 \mu_{(1)} y_{0_{(0)}} - y_{0_{(0)}} y_{2_{(0)}} +$$

$$N_{sub} y_{1_{(0)}} y_{2_{(0)}}$$

$$+ \hat{u}_0 \tau \omega_c^2 \left( N_{sub} \frac{dy_{1_{(0)}}}{d\chi} - 2 \frac{dy_{2_{(0)}}}{d\chi} \right) \tau_{(1)}$$

$$- Ng \tau \omega_c^2 \left( \frac{dy_{1_{(0)}}}{d\chi} - 2 \frac{dy_{2_{(0)}}}{N_{sub} d\chi} \right) \tau_{(1)} \quad (46b)$$

o,  $L_0(y_{n_{(1)}}) = S_{(1)}$ .

( $\epsilon^2$ ):

$$(2k_0 + 1)\hat{u}_0 y_{0_{(2)}} + [\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)] y_{2_{(2)}} -$$

$$N_{sub} \hat{u}_0 y_{1_{(2)}} + Ng \left( y_{1_{(2)}} + \frac{y_{2_{(2)}}}{N_{sub}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 & 2k_0 y_{0_{(o)}} y_{0_{(i)}} - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} y_{0_{(o)}} - \\
 & \mu_{(1)} \left( 2\hat{u}_0 y_{0_{(i)}} + y_{0_{(o)}}^2 \right) - \\
 & \hat{u}_0 \left( \frac{dy_{2_{(o)}}}{d\chi} \tau \omega_c^2 \tau_{(2)} + \frac{d^2 y_{2_{(o)}}}{d\chi^2} \tau \omega_c^2 \tau_{(1)}^2 + \right. \\
 & \left. \frac{dy_{2_{(i)}}}{d\chi} \tau \omega_c^2 \tau_{(1)} \right) - y_{2_{(o)}} y_{0_{(i)}} + \\
 & N_{sub} \hat{u}_0 \left( \frac{dy_{1_{(o)}}}{d\chi} \tau \omega_c^2 \tau_{(2)} + \frac{dy_{1_{(i)}}}{d\chi} \tau \omega_c^2 \tau_{(1)} + \right. \\
 & \left. \frac{d^2 y_{1_{(o)}}}{d\chi^2} \tau \omega_c^2 \tau_{(1)}^2 \right) - \\
 & y_{0_{(o)}} \left( \frac{dy_{2_{(o)}}}{d\chi} \tau \omega_c^2 \tau_{(1)} + y_{2_{(i)}} \right) + \\
 & N_{sub} y_{2_{(o)}} \left( \frac{dy_{1_{(o)}}}{d\chi} \tau \omega_c^2 \tau_{(1)} + y_{1_{(i)}} \right) + \\
 & N_{sub} y_{1_{(o)}} \left( \frac{dy_{2_{(o)}}}{d\chi} \tau \omega_c^2 \tau_{(1)} + y_{2_{(i)}} \right) - \\
 & N_{sub} (1 - \hat{u}_0) \tau \omega_c^2 \left( \frac{dy_{2_{(o)}}}{d\chi} \tau_{(2)} + \frac{d^2 y_{2_{(o)}}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 + \right. \\
 & \left. \frac{dy_{2_{(i)}}}{d\chi} \tau_{(1)} \right) - Ng \tau \omega_c^2 \tau_{(2)} \left( \frac{dy_{1_{(o)}}}{d\chi} + \frac{d^2 y_{2_{(o)}}}{d\chi^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{46c}$$

o también,  $L_0(y_n^{(2)}) = S_{(2)}$ .

En general,  $L_0(y_n^{(l)}) = S_{(l)}$ . Nótese que mientras que la forma de  $L_0(y_n^{(l)})$  permanece sin cambios,  $S_{(l)}$  se ve incrementada en complejidad, mayormente para  $l \geq 2$ .

### Referencias

- Achard J. L., D. A. Drew and R. T. Lahey, "The analysis of non-linear density-wave oscillations in boiling channels", *J. Fluid Mech.* **155**, 213-232 (1985).
- Clausse A., D. F. Delmastro and L. Juanicó, "A simple delay model for two-phase flow dynamics", *NUREG-CP-0142*, **4**, 3232-3244, *NURETH-7 Conference*, Saratoga Springs, (1995).
- Clausse A., D. F. Delmastro and L. Juanicó, "A simple delay model for the dynamics of boiling channels", *Latin Am. Applied Research* **26**, 185-191 (1996).
- Delmastro "Aplicación de la Teoría de Sistemas Dinámicos al Análisis de Inestabilidades Termohidráulicas", Tesis de doctorado en Ing. Nuclear, Instituto Balseiro, 1993.
- Delmastro D., L. Juanicó y Clausse A. "A fully analytical treatment of Hopf bifurcations in a model of boiling channel", *Latin American Applied Research*, **28**, 165-173, 1998.
- Delmastro D. y L. Juanicó. "The influence of gravity on the dynamic of two phase boiling channels", 7° Congreso Latinoam. de Transferencia de Calor y Materia, Vol. 3, 801-805, Univ. Nac. de Salta, en Salta, octubre 1998.
- Delmastro D., Juanicó, L. y Clausse, A. "A delay theory for boiling flow stability analysis". En prensa, aceptado para su publicación en *International Journal of Multiphase Flow*, 2000.
- Dorning J., "An introduction to chaotic dynamics in two-phase flow". En Yalim B. Yilmaz Ed., *Heat Transfer - Philadelphia*, 1989, 241-248.
- Durnan J.D., "SBWR, a simplified boiling water reactor", *Nucl. Eng. Design*, **109**, 73-77, 1988.
- Lahey R.T., "Advances in the analytical modelling of linear and non-linear density-wave instability modes", *Nuc. Eng. and Design* **95**, 5-34 (1986).
- Lahey R.T. and D.A. Drew, "An Assessment of the Literature Related to LWR Instability Modes", *NUREG Report*, *NUREG/CR-1414* (1980).
- Lahey R.T. and F.J. Moody, "The Thermal hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor", *ANS Monograph*, (1977).
- Juanicó, L., "Identificación de cuencas dinámicas en flujos con ebullición", Tesis de doctorado en Ing. Nuclear, Instituto Balseiro, 1998.
- Rizwan-Uddin, "On density-wave oscillations in

two phase flows", *Int. J. in Multiphase Flow*, **20(4)**, 721-737 (1994).

Kataoka Y. et al., "Conceptual design and thermal-hydraulics characteristics of natural circulation boiling water reactors". *Nucl. Technol.*, **82**, 147-156, 1988.

### Lista de símbolos

- $Eu$  número de Euler,  $Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f u_r^2}$
- $f$  función definida en ec. (41),
- $h$  entalpía específica,
- $h_{fg}$   $h_g - h_f$
- $k_i$  coeficiente de fricción a la entrada,
- $k_e$  coeficiente de fricción a la salida,
- $k$   $(k_i - 1)/(k_e + 1)$
- $j$  unidad imaginaria,
- $L_{ch}$  longitud calefaccionada,
- $N_{pch}$  número de cambio de fase,  $(N_{sub}/\hat{u}_o)$ ,
- $N_{sub}$  número de subenfriamiento,
- $$N_{sub} = v \Omega = \frac{\Delta h_{sub} v_{fg}}{h_{fg} v_f},$$
- $Ng$  número gravitatorio,  $Ng = \frac{gL}{u_r^2 (k_e + 1)}$
- $p$  presión,
- $q$  potencia volumétrica,
- $q''$  flujo de calor,
- $R$  factor de riesgo (definido en ec. (45)),
- $t$  tiempo,
- $u$  velocidad,
- $v$  volumen específico,

$v_{fg}$   $v_g - v_f$ ,

$z$  coordenada espacial.

### Griegas

- $\delta$  perturbación de la velocidad,
- $\varepsilon$  parámetro pequeño,
- $\lambda$  posición de la frontera de ebullición o longitud de la zona líquida,
- $\rho$  densidad,
- $\nu$  tiempo de la partícula en la región líquida,
- $\tau$  tiempo de la partícula en la región bifásica,
- $\Omega$   $q v_{fg} / h_{fg}$ .

### Subíndices

- e egreso,
- f líquido (saturación),
- g vapor,
- i ingreso,
- n paso temporal,
- l orden del término,
- o estado estacionario,
- r referencia.
- $\infty$   $N_{sub} \rightarrow \infty$ .

### Otros

- $\wedge$  adimensional.

Manuscrito recibido y aceptado en mayo de 2000.